Un exercice sur la trigonalisation et mise sous la forme de Jordan : D'après Grifone page 207, exercice 41

On considère u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

On a

$$det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 1).$$

Par définition, λ est valeur propre si $det(A - \lambda I) = 0$; on a donc $\lambda = 1$ est une valeur propre simple (de multiplicité 1) tandis que $\lambda = 2$ est une valeur propre de multiplicité 3.
Pour diagonaliser la matrice dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on est amené à chercher les sous-espaces propres et comparer leur dimension respective avec la mutiplicité de la valeur propre associée. Il y'a diagonalisation, si

- Toutes les valeurs propres sont réelles;
- pour chaque valeur propre, on a égalité entre la multiplicité de la valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.

Si toutes les valeurs propres sont réelles mais qu'il n'y'a pas égalité entre les multiplicité et dimension de sous-espace propre pour une valeur propre, on n'a pas diagonalisation mais trigonalisation. La matrice A est semblable à une matrice triangulaire. On doit donc chercher la matrice de passage et la matrice triangulaire. Si les valeurs propres ne sont pas toutes réelles, la matrice est alors à reconsidérer dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.
Détermination du sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1.
On commence par chercher $v_1 = (x, y, z, t)^t \in Ker(A - I)$; un tel $v - 1$ vérifie $(A - I)v - 1 = 0$ et donc le système d'équations suivant

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0x & = & 0 \\ -x + 3y + z - 2t & = & 0 \\ 2x + y + z - t & = & 0 \\ x + 2y + z - t & = & 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

En soustrayant membre à membre les deux dernières équations, on obtient $x = y$. En reportant $x = y$ dans les deuxième et troisième équations , on obtient $z - 2t = -2x$ et $z - t = -3x$. Ce dernier système donne donc $t = -x$ et $z = -4x$. Ainsi $v_1 = (x, x, -4x, -x)^t = x(1, 1, -4, -1)^t$. On a donc

$$E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comme vecteur propre, on prendra $v = (1, 1, -4, 1)^T$.
Détermination du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.
On commence par chercher $w - 1 = (x, y, z, t)^t \in Ker(A - 2I)$; un tel w vérifie les équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ -x + 2y + z - 2t & = & 0 \\ 2x + y - t & = & 0 \\ x + 2y + z - 2t & = & 0, \end{array} \right. \tag{3}$$

ce qui donne $x = 0$ et y, z, t vérifiant

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y + z - 2t & = & 0 \\ y - t & = & 0 \end{array}\right. \tag{4}$$

On obtient directement $z = 0$ et $y = t$. Ainsi, on a $w_1 = (0, y, 0, y) = y(0, 1, 0, 1)$ et donc E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 1 avec

$$E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

On prendra comme vecteur propre le vecteur $w = (0, 1, 0, 1)$.
Mauvaises nouvelles : pas de diagonalisation de l'endomorphisme associé à A. Expliquons :
On ne regarde que les valeurs propres de multiplicité strictement supérieure à 1. *Ce sont elles qui sont responsables d'une éventuelle non diagonalisation de la matrice.*
Il est tout à fait clair que A est loin d'être diagonalisable; en effet la multiplicité de la valeur propre 2 *est égale à 3 alors que la dimension du sous-espace propre associé à cette valeur propre est* 1. *Multiplicité et dimension ne coincident pas donc aucun espoir de diagonaliser!!!! vu que $\mathbb{R}^4 \neq E_1 \oplus E_2$.*
Bonnes nouvelles : on a 4 valeurs propres réeles. La valeur propre 1 est de mutiplicité un et la valeur propre 2 de multiplicité trois. On compte le nombre de valeurs propres réelles : la valeur propre 1 comptée une fois et la valeur propre 2 que l'on compte trois fois (car de multiplicité 3). Au total, on a quatre valeurs propres réelles pour une matrice d'ordre 4.
Dans ce cas, on a un théorème qui affirme que l'on peut trouver une base de $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice de l'endomorphisme u est triangulaire. Mieux encore : cette matrice a une structure de Jordan (voir le cours ou la fin de ce papier). Dans notre cas, la formule à l'origine de ce théorème s'écrit

$$\mathbb{R}^4 = Ker(u - I) \oplus Ker(u - 2I)^3.$$

Le détail des calculs pour trigonaliser
Nous allons suivre la méthode vue en TD : on sait que $Ker(u - 2I) \subset Ker(u - 2I)^2 \subset Ker(u - 2I)^3$ et que $\mathbb{R}^4 = Ker(A - I) \oplus Ker(u - 2I)^3$. Cherchons donc une famille libre de $Ker(u - 2I)^3$ qui est de dimension 3. On a $Ker(u - 2I) \subset Ker(u - 2I)^2 \subset Ker(u - 2I)^3$ et donc vu que $w_1 \in Ker(u - 2I) \subset Ker(u - 2I)^3$, on a déjà un vecteur dans la base. On va compléter avec deux vecteurs restants. Le deuxième vecteur w_2 on va le chercher dans $Ker(u - 2I)^2 \subset Ker(u - 2I)^3$ (au sens strict): il vérifie $(u - 2I)^2 w_2 = 0$ et donc $(u - 2I)[(u - 2I)w_2 = 0$; ainsi $(u - 2I)w_2$ appartient à $Ker(u - 2I)$. Il suffit donc de prendre

$$(u - 2I)w_2 = w - 1.$$

Notant $w_2 = (x, y, z, t)^t$, on doit résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ -x + 2y + z - 2t & = & 1 \\ 2x + y - t & = & 0 \\ x + 2y + z - 2t & = & 1, \end{array}\right. \tag{5}$$

ce qui donne $x = 0$ et

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y + z - 2t & = & 1 \\ y - t & = & 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

On a donc $x = 0$, $y = t$ et $z = 1$. Donc $w_2 = (0, y, 1, y)^t = (0, 0, 1, 0)^T + y(0, 1, 0, 1)^T$. On se contentera de prendra $w_2 = (0, 2, 1, 2)^T \in Ker(u - 2I)^2$.
Reste le troisième vecteur w_3 que l'on va chercher dans $Ker(u - 2I)^3$. On a donc $(u - 2I)^2[(u - 2I)w_3] = 0$; donc $(u - 2I)w_3 \in Ker(u - 2I)^2$; or on sait que $w_2 \in Ker(u - 2I)^2$, il suffit donc de résoudre $(u - 2I)w_3 = w_2$ et donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ -x + 2y + z - 2t & = & 2 \\ 2x + y - t & = & 1 \\ x + 2y + z - 2t & = & 2, \end{array}\right. \tag{7}$$

ce qui donne $x = 0$ et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2y + z - 2t & = & 2 \\ y - t & = & 1 \end{array} \right. \tag{8}$$

on obtient donc $y - t = 1$ et $z = 0$. On prendra donc $w_3 = (0, 1, 0, 0)$.
Remarque : On a $(u - 2I)w_2 = w \Rightarrow Aw_2 = 2w_2 + w$ et $(A - 2I)w_3 = w_2 \Rightarrow Aw_3 = w_2 + 2w_3$.

Finalisation de l'étape de trigonalisation On considère la famille $\{v, w, w_2, w_3\}$. On vérifie sans peine que cette famille est libre dans $\mathbb{R}^4$ et donc est une base de $\mathbb{R}^4$. En effet, considérons une combinaison linéaire nulle : $av + bw + cw_2 + dw_3 = 0$ avec a, b, c et d réels. Montrons que l'on a alors $a = b = c = d = 0$. On applique $(u - I)^3$ pour avoir

$$a(u - I)^3 v + b(u - I)^3 w + c(u - I)^3 w_2 + b(u - I)^3 w_3 = 0;$$

comme w, w_2 et w_3 appartiennent à $Ker(u - I)^3$ on a alors $a(u - I)^3 v = 0$. Comme $\mathbb{R}^4 = Ker(u - I)^3 \oplus Ker(u - 2I)^3$, on a alors $v \in Ker(u - 2I) \Rightarrow (A - I)^3 v \neq 0$ et donc

$$a(u - I)^3 v = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Il reste alors $bw + cw_2 + dw_3 = 0$. En appliquant $(A - I)^2$ en tenant compte que $w, w_2 \in ker(u - I)^2$ et $w_3 \notin Ker(u - I)^2$, on a alors $d(A - I)^2 w_3 = 0 \Rightarrow d = 0$. Il reste alors

$$bw + cw_2 = 0.$$

On applique ensuite $(u - I)$ et on tient compte du fait que $w \in Ker(u - I)$ et que $w_2 \notin Ker(u - I)$. On obtient $c = 0$. Il reste l'équation $bw = 0$, comme $w \neq 0$ on a trivialement $b = 0$.
Ainsi on a a montré que $av + bw + cw_2 + dw_3 = 0$ implique $a = b = c = d = 0$. Donc $\{v, w, w_2, w_3\}$ est libre et donc est une base de $\mathbb{R}^4$ (on a quatre vecteurs libres dans $\mathbb{R}^4$).
Relativement à cette base, l'endomorphisme s'exprime via une matrice A' que l'on cherche ainsi : on calcule Av, Aw, Aw_2 et Aw_3 relativement à la base $\{v, w, w_2, w_3\}$ pour avoir

$$\begin{array}{lcl} Av & = & v \\ Aw & = & 2w \\ Aw_2 & = & w + 2w_2 \\ Aw_3 & = & w_2 + 2w_3; \end{array}$$

ainsi on a

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{v,w,w_2,w3} \tag{9}$$

et comme matrice de passage la matrice ayant pour colonnes les vecteurs v, w, w_2 et w_3 , plus précisément

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Remarquez la belle structure de cette nouvelle matrice. Dans le bloc diagonal associé à la valeur propre 2, on a un bloc de Jordan. On a 2 sur la diagonale et des 1 juste au dessus de la diagonale. Cette base est la seule capable permettant d'avoir une telle structure. On aurait pu prendre par exemple d'autre vecteurs pour compéter la base (2 vecteurs de la base canonique, par exemple) : on aurait eu une matrice triangulaire supérieure mais ayant une structure "banale" pleine. Inutile pour des calculs de puissance, ou pour résoudre des équations différentielles.